PROVA DE MATEMÃTICA

Divide-se em duas partes:
Part I :Escolha a resposta certa (páginas 1 a 3);
Part II :Apresente todos os calculos que efectuar (páginas 4 a 7).

Parte I

Escolha a resposta certa

1- De uma função f, continua em $\mathbb{R}$, sabe-se que $f(0) = 5ef(4) = 1$.
Qual das seguintes afirmações è necessáriamente verdadeira?

(a) f é decrescente em[0,4]

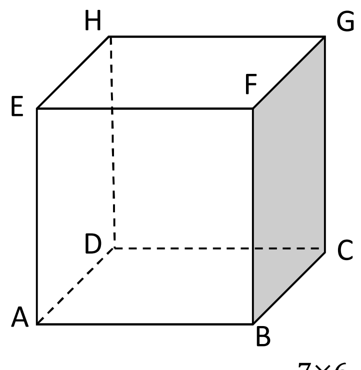
(b) $1 \leq f(2) \leq 5$

(c) A função f não term zeros em[0,4]

(d) A equação f(x)=3 épossível em $\mathbb{R}$

Resposta : d

2- Considere o cubo representado na figura ao lado.
Escolhendo ao acaso três vértices do cubo, a probabilidade de que definam um triângulo com vértice em A é:



(a) $\frac{^8C_{3-1}}{^8C_3}$

(b) $\frac{7\times6}{^8C_3}$

(c) $\frac{^7C_2}{^8C_3}$

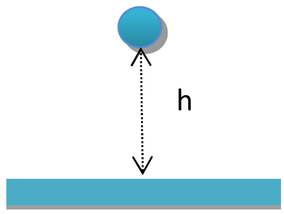
(d) $\frac{^8C_2}{^8C_3}$

Resposta : c

3- Considere que quando se atira uma bola ao ar, com uma velocidade inicial de 30 m/s, a altura em metros, atingida pela bola ao fim de t segundos, é dada pela ecpressão:

$$\mathrm{h}(t) = 30t - 4{,}9t^2$$

Poda afirmar-se que a bola esteve no ar:



(a) mais do que 6,12 s ;

(b) menosque 6s ;

(c) exactamente 6s ;

(d) exactamente 6,12 s .

Resposta : a

4- Sobre a condição $|x| \leq 0$ pode-se afirmar que:

(a) é impossível ;

(b) é universal ;

(c) tem uma e uma sósolução ;

(d) tem duas soluções distintas .

Resposta : c

5- Um cesto tem cinco maçãs e três pêras. Extraem-se ao acaso, sucessivamente e sem reposição, dois frutos do cesto.
A probablilidade de saírem duas maçãs é?

(a) $\frac{5}{7}$

(b) $\frac{1}{12}$

(c) $\frac{4}{7}$

(d) $\frac{5}{14}$

Resposta : d

6- Indique o número real que é solução da equação $e^{1-x} = \frac{1}{\sqrt[3]{e}}$.

(a) $-\frac{2}{3}$

(b) $-\frac{4}{3}$

(c) $\frac{2}{3}$

(d) $\frac{4}{3}$

Resposta : d

7- Relativamente a $lim_{x \to 0} \frac{2x}{In(x+1)}$ pode afirmar-se que:

(a) O seu valor éigual a 2

(b) o seu valor éiqual a $\frac{1}{2}$

(c) O seu valor éigual a 1

(d) Não existe

Resposta : a

8- Considere a função f definida em $[0, \pi]$por $f(x) = 1 - 3\text{sen}(2x)$.
O valor de x para o qual $f(x)$é mínimoé:

(a) $\frac{\pi}{4}$

(b) 0

(c) $\frac{3\pi}{4}$

(d) $\frac{\pi}{2}$

Resposta : a

Parte 2

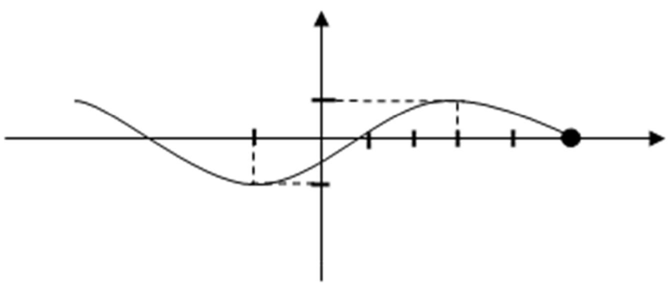
Apresente todos os calculus que efectuar

1- Seja$s$ uma funçãocontinua, de domínío$]-\infty, 5]$, com a seguinte tablea

x	$-\infty$	-1		3		5
$s(x)$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

1.1- Faça o esboço para uma possível representação gráfica de f.

Resolução :



1.2- Das seguintes afirmações identifique, justificando, as que são falsas.

(a) A equação $s(x) = -1$ é uma equação impossível.

(b) -1 é o mínimo absoluto de s.

(c) O valor máximo de s em $\mathbb{R}^+$é 1.

(d) A função tem três zeros.

Resolução :

(a) Falsa, $f(-1) = -1$

(b) Verdadeira

(c) Verdadeira

(d) Verdadeira

2- Mostre usando o Teorema de Bolzano, que a equação $2x + \text{In}x = x^2$ é possível no intervalo $\left]\frac{1}{e}, 1\right[$.

Resolução :

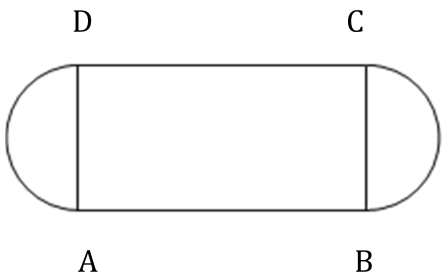
Calcular $f\left(\frac{1}{e}\right)$ e verificar que é < 0

Calcular $f(1)$e verificar que é > 0

Aplicar o T. de Bolzano

3- A figura a baixo é constituída por um rectângulo $[ABCD]$ e por dois semicírculos cujos diâmetros são iguais ao comprimento de um dos lados do rectângulo.

Considere que $\overline{\text{AB}}= x$ cm e que a área do rectângulo $[ABCD]$ é $400cm^2$.



3.1- Mostre que o perímetro P da figura, em função de x. e em cm, é dado por:

Resolução :

Verificar que $\text{y} = \frac{400}{x} e \quad P = 2x + \frac{400\pi}{x}$

3.2- Determine o valor mínimopara o perímetro P da figura.

Resolução :

Derivar $p^1 = 2 - \frac{400\pi}{x}$

Fazer $p^1 = 0$

$x^2 = 200\pi \Leftrightarrow x\sqrt{200\pi}$

Substitua na formula de perimetro

4- Dada a função $f(x) = \frac{x-1}{x^2-4x+3}$ calcule:

a) OdomÍnio.

b) Monotonia e extremos.

c) Concavidades do gráfico e existência de pontos de inflexão.

d) Assíntotas do gráfico.

e) Esboce o gráfico da função e indique o contra-domínio.

Resolução :

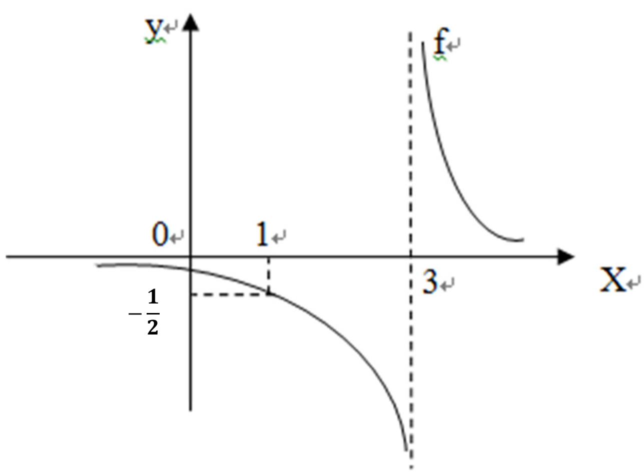
a) Fazer $D = \{x \in \mathbb{R}: x^2 - 4x + 3 \neq 0\}$ resolvendo dá $D = \mathbb{R} \backslash \{1,3\}$

b) Fazer a derivada da função que dá $f'(x) = \frac{-1}{(x-3)^2}$ e escrever o quadro de monotonia e extremos, ou então, verificar que a derivada da função é sempre negativa no seu domínio logo a função é sempre decrescente, e não tem extremos pois o númerador é uma constante diferente de zero.

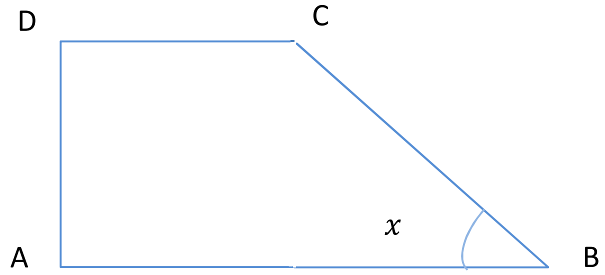
c) Fazer a segunda derivada da função que dá $f''(x) = \frac{2}{(x-3)^3}$ e o quadro da concavidade e pontos de inflexão.

d) Verificar a existência de assíntotas verticais para x=3 e x=1, horizontais calculando o limite da função quando x tende para infinito (Obtendo a assíntota y=0) e verificar a não existência de assíntotas oblíquas.

e)



5- figura está representado um trapésio rectângulo$[ABCD]$ em que:



●$\overline{\mathrm{BC}}= 2dm;$
●$\overline{DC} = 2dm;$

●$x$éa amplitude, emradianos, do ângulo $[CBA]\left(x \in \left|0,\frac{\pi}{2}\right|\right)$.

a) Prove que a área trapésio $[ABCD]$ é dada, em decímetros quadrados e em função de x.
b) Determine o perímetro do trapézio de área máxima.
Apresente o resultadoem de címetros.

Resolução :

a) A$(x) = 2senx + sen(2x)$
b) 5+$\sqrt{3}dm$